18/10/19

## Άσκηση:

Ένα ζάρι ρίχνεται δύο φορές. Να βρείτε την πιθανότητα

α) Το άθροισμα να είναι ίσο με 7.

β) Η απόλυτη τιμή της διαφοράς των ρίψεων να είναι ίση με 4.

## Λύση:

$S = \{(x,y) : x, y = 1, \dots, 6\}$

| $y \backslash x$ | 1 | 2 | ... | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,1) | (1,2) | | |
| 2 | (2,1) | | | |
| ⋮ | | | | |
| 6 | (6,1) | | | (6,6) |

$\Rightarrow 6 \cdot 6 = 36.$

α) $A = \{(x,y) : x,y = 1,\dots,6,\ x+y=7\} = \{(6,1),(1,6),(2,5),(5,2),(4,3),(3,4)\}$

Άρα $P(A) = \dfrac{\|A\|}{\|S\|} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

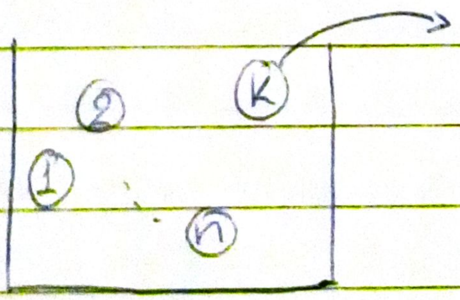
β) $\{(x,y) : x,y = 1,\dots,6,\ |x-y| = 4\} = \{(6,2),(2,6),(5,1),(1,5)\}$

Άρα $P(B) = \dfrac{\|B\|}{\|S\|} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

<u>Άσκηση:</u>

Μια κάλπη περιέχει n-διακεκριμένες μπάλες αριθμημένες από το 1 έως το n. Από αυτές εκλέγονται κ-μπάλες ($\kappa \le n$) η μία μετά την άλλη με επανατοποθέτηση. Ποια είναι η πιθανότητα οι μπάλες που θα εκλεγούν να είναι διαφορετικές αν ενδιαφερόμαστε και για τη σειρά επιλογής των μπαλών.

<u>Λύση:</u>




- Ο S αποτελείται από κ-άδες

$$\underset{\substack{\uparrow\\ n}}{\underline{1^{\eta}}}\quad \underset{\substack{\uparrow\\ n}}{\underline{2^{\eta}}}\quad \dots \quad \underset{\substack{\uparrow\\ n}}{\underline{k^{\eta}}}$$

Άρα, $n^k$.

• Ο A αποτελείται από k-άδες

$$\underset{\substack{\uparrow\\ n}}{\underline{1^{\eta}}}\quad \underset{\substack{\uparrow\\ n-1}}{\underline{2^{\eta}}}\quad \dots \quad \underset{\substack{\uparrow\\ n-(k-1)=n-k+1}}{\underline{k^{\eta}}}$$

Άρα, $n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$

Συνεπώς $P(A) = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \dfrac{(n)_k}{n^k}$

(Μπορεί να το δω και ως διάταξη)

__Άσκηση:__

Ένα ζάρι ρίχνεται 6 φορές.

α) Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου οι όψεις 2,4,6 να εμφανίζονται από 2 φορές η κάθε μία

β) Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου το αποτέλεσμα των ρίψεων είναι διαφορετικό;

__Λύση:__

α)

$$S:\quad \underset{\substack{\uparrow\\ 6}}{\underline{1^{\eta}}}\quad \underset{\substack{\uparrow\\ 6}}{\underline{2^{\eta}}}\quad \dots \quad \underset{\substack{\uparrow\\ 6}}{\underline{6^{\eta}}}$$

Άρα $\|S\| = 6^6$

$A$: $\underline{1^η}$ $\underline{2^η}$ ... $\underline{6^η}$

2, 2, 4, 4, 6, 6
2, 4, 6, 2, 4, 6
2, 6, 4, 2, 6, 4
⋮

$\xrightarrow[\text{όχι διακεκριμένων στοιχείων}]{\text{είναι μετάθεση}} \binom{6}{2\,2\,2}$

Άρα $P(A) = \dfrac{\binom{6}{2\,2\,2}}{6^6}$

β)

$B$: $\underline{1^η}$ $\underline{2^η}$ ... $\underline{6^η}$

1, 2, 3, 4, 5, 6
6, 5, 4, 3, 2, 1
⋮

$\xrightarrow[\text{διαφορετικών στοιχείων}]{\text{μετάθεση}} 6!$

Άρα $P(B) = \dfrac{6!}{6^6}$

Άσκηση:

Οι 52 κάρτες μιας τράπουλας τοποθετούνται σε σειρά η μια μετά την άλλη. Ποια η πιθανότητα η $37^η$ κάρτα να είναι "άσσος"

Λύση:

$S \leftarrow$ όλες οι τοποθετήσεις

$P(A) = \dfrac{\|A\|}{\|S\|} = \dfrac{4 \cdot 51!}{52!} = \dfrac{4}{52}$

Άσκηση:

Ένα έτος έχει 365 μέρες. Όλες είναι το ίδιο πιθανό για να γεννηθεί ένα άτομο. Ποια η πιθανότητα κ-άτομα $(k<365)$ να έχουν διαφορετικές μέρες γενέθλια;

Λύση:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{o} \to 365 \\ 2^{o} \to 365 \\ \vdots \\ k^{o} \to 365 \end{array}\right\} \underbrace{365 \cdot \ldots \cdot 365}_{k\text{-φορές}} = 365^{k}$$

ή

$$S: \underset{\substack{\uparrow \\ 365}}{\underline{1^{η}}} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ 365}}{\underline{2^{η}}} \quad \ldots \quad \underset{\substack{\uparrow \\ 366}}{\underline{k^{η}}}$$

$$A: \underset{\substack{\uparrow \\ 365}}{\underline{1^{η}}} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ 364}}{\underline{2^{η}}} \quad \ldots \quad \underset{\substack{\uparrow \\ 365-k+1}}{\underline{k^{η}}}$$

Άρα $P(A) = \dfrac{(365)_k}{365^k}$

## Άσκηση:

Μια κάλπη περιέχει m-διακεκριμένες μαύρες μπάλες και n-διακεκριμένες άσπρες. Από αυτές k-σφαίρες εκλέγονται χωρίς επανατοποθέτηση. Να προσδιοριστεί η πιθανότητα των k-μπαλών να περιέχει r μαύρες και k-r άσπρες μπάλες με $r \leq m$, $k-r \leq n$.

α) Αν το δείγμα είναι μη-διατεταγμένο (δε με ενδιαφέρει η σειρά εκλογής των μπαλών)

β) Αν το δείγμα είναι διατεταγμένο (με ενδιαφέρει η σειρά εκλογής)

Καταλήξαμε πως $P(A)_α = P(A)_β$

## Λύση:

α) $P(A) = \dfrac{\binom{m}{r} \cdot \binom{n}{k-r}}{\binom{m+n}{k}}$

β) $P(A) = \dfrac{(m)_r \cdot (n)_{k-r} \cdot \binom{k}{r\ \ k-r}}{(m+n)_k} = \dfrac{\binom{k}{r}(m)_r (n)_{k-r}}{(m+n)_k}$

(Το κάνω για να "μπερδέψω" τις άσπρες με τις μαύρες μπάλες.

**Άσκηση:** (Πρόβλημα που προτάθηκε από τον Chevalier de Mere στον Pascal).

Τι είναι προτιμότερο να στοιχηματίσει ένας παίκτης; Ότι θα εμφανιστεί τουλάχιστον μία φορά η όψη 6 στη ρίψη ζαριού 4 φορές ή ότι θα εμφανιστούν τουλάχιστον μία φορά "εξάρες" στη ρίψη 2 ζαριών 24 φορές;

**Λύση:**

- $P(A) = 1 - P(A') = 1 - P\left(\begin{matrix}\text{κανένα 6 στη ρίψη} \\ \text{ζαριού 4 φορές}\end{matrix}\right) = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 0{,}518$

- $P(B) = 1 - P(B') = 1 - P\left(\begin{matrix}\text{καμία φορά "εξάρες"} \\ \text{στη ρίψη 2 ζαριών 24 φορές}\end{matrix}\right) = 1 - \frac{35^4}{36^4} = 0{,}491$

Είναι $P(A) > P(B)$

Συνεπώς είναι προτιμότερο να στοιχηματίσει στο πρώτο ενδεχόμενο.

**Άσκηση:**

Από τις 52 κάρτες μιας τράπουλας εκλέγονται 5. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

α) P(χρώματος: Οι 5 κάρτες είναι ίδιου χρώματος πχ: σπαθί, κλπ)

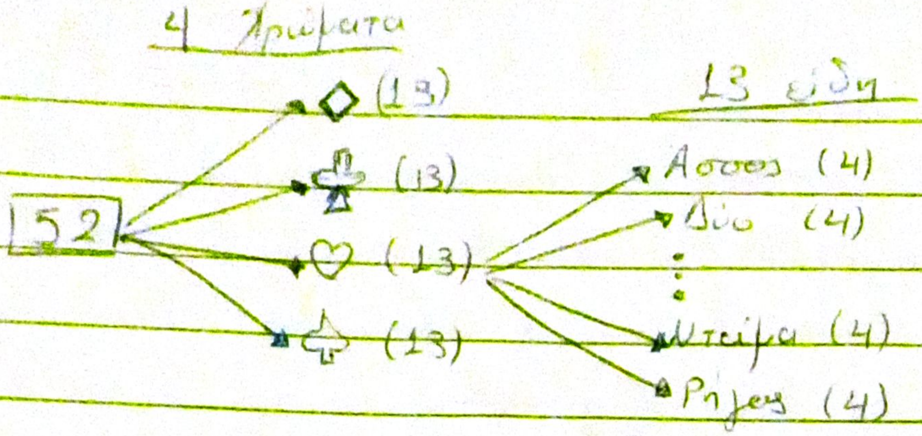
β) P(ενός ζεύγους: της μορφής α, α, β, γ, δ με α, β, γ, δ κάποιο είδος πχ: άσσος, δέκα, κλπ)

γ) P(Δύο ζευγών: της μορφής α, α, β, β, γ)

δ) P(τρία ίδια είδους: α, α, α, β, γ, δ)

ε) P(4 ίδια είδους: α, α, α, α, β)

**Λύση:**




α) $P(\text{χρώματος}) = \dfrac{4\cdot\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$

β) $P(\text{ενός ζεύγους}) = \dfrac{4\binom{13}{4}\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$

γ) $P(\ldots) = \dfrac{3\binom{13}{3}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$

⋮

## Στατιστικός Ορισμός της Πιθανότητας

• Εμπειρικός ορισμός: ~1900 (≈Fischer):

Βασίζεται στην προσέγγιση της πιθανότητας από τη σχετική συχνότητα

Υπαρκτό παράδειγμα: Ρίψη νομίσματος N-φορές

| | N-φορές | n(k) ← αριθμός κορωνών | n(k)/N |
|---|---|---|---|
| Buffon | 4040 | 2048 | 0,508 |
| Pearson | 12.000 | 6019 | 0,516 |
| -//- | 24.000 | 12012 | 0,5005 |

• **Ορισμός:** Αν μια διαδικασία επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες $N$-φορές και στην ακολουθία των $N$-επαναλήψεων εμφανιστεί $n(E)$-φορές το ενδεχόμενο $E$, τότε η (εμπειρική) πιθανότητα του $E$ ορίζεται να είναι το $P(E) = \lim_{N \to \infty} \frac{n(E)}{N}$.

Κοινές ιδιότητες με τον κλασικό ορισμό.

1) $0 \leq P(E) \leq 1$

2) $P(S) = 1$

3) Αν $A, B$ δύο ενδεχόμενα, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4) $P(E') = 1 - P(E)$ (+ Απόδειξη)

Απόδειξη 3)

$$P(A \cup B) = \lim_{N \to \infty} \frac{n(A \cup B)}{N} = \lim_{N \to \infty} \frac{n(A) + n(B)}{N} = \lim_{N \to \infty} \frac{n(A)}{N} + \lim_{N \to \infty} \frac{n(B)}{N} =$$

$$= P(A) + P(B)$$

22/10/19